ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΑΘΗΝΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
Τμήμα Πολιτικών Έργων Υποδομής

Μάθημα: **Στατική ΙΙ** — 9 Φεβρουαρίου 2011
Διδάσκων: Τριαντ. Κόκκινος, Ph.D. — Διάρκεια εξέτασης 2:15

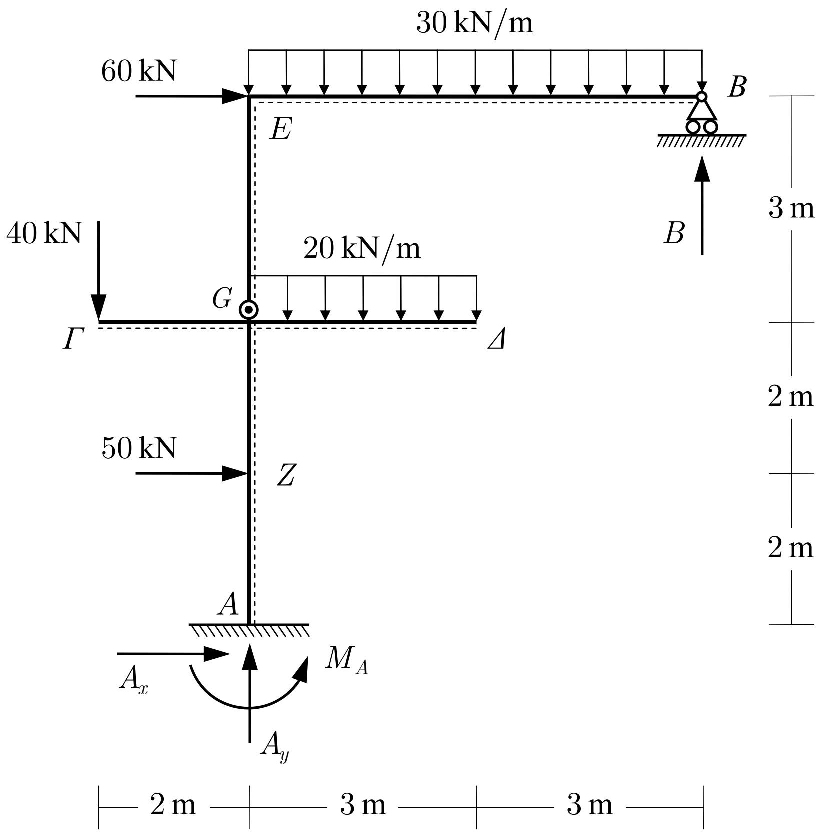
ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

(1η περίοδος χειμερινού εξαμήνου 2010-11)

ΘΕΜΑ 1ο (30%)

Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα αξονικών δυνάμεων [N], τεμνουσών δυνάμεων [Q] και καμπτικών ροπών [M] του παρακάτω πλαισίου. Επιπλέον, να υπολογισθεί η τιμή και η θέση της μέγιστης θετικής ροπής.



<u>Επίλυση:</u>

<u>Προσδιορισμός Αντιδράσεων:</u>

$$\circlearrowleft \Sigma M_G^{\text{άνω}} = 0 \;\Rightarrow\; 6\,\mathrm{m}\cdot B - 3\,\mathrm{m}\cdot 60\,\mathrm{kN} - (30\,\mathrm{kN/m}\cdot 6\,\mathrm{m})\cdot 3\,\mathrm{m} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{B = 120\,\mathrm{kN}}$$

$$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0 \;\Rightarrow\; M_A - 2\,\mathrm{m}\cdot 50\,\mathrm{kN} + 2\,\mathrm{m}\cdot 40\,\mathrm{kN} - (20\,\mathrm{kN/m}\cdot 3\,\mathrm{m})\cdot 1.5\,\mathrm{m}$$

$$-7\,\mathrm{m}\cdot 60\,\mathrm{kN} - (30\,\mathrm{kN/m}\cdot 6\,\mathrm{m})\cdot 3\,\mathrm{m} + 6\,\mathrm{m}\cdot B = 0$$

$$\Rightarrow\; M_A - 100\,\mathrm{kNm} + 80\,\mathrm{kNm} - 90\,\mathrm{kNm} - 420\,\mathrm{kNm}$$

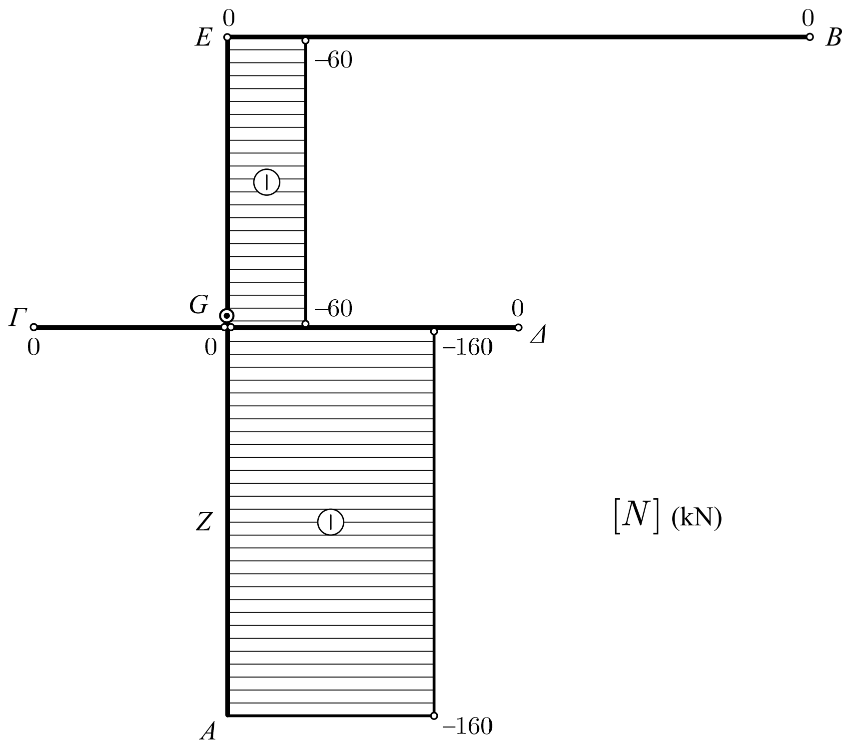
$$-540\,\mathrm{kNm} + 6\,\mathrm{m}\cdot B = 0$$

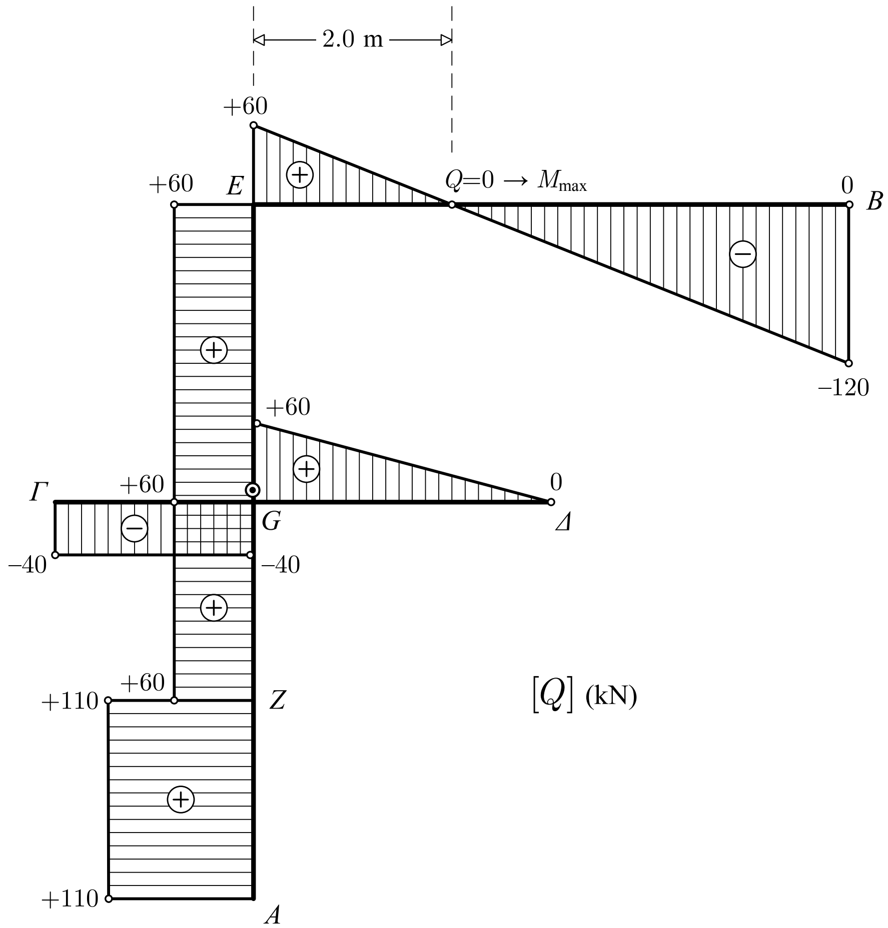
$$\Rightarrow\; M_A - 1070\,\mathrm{kNm} + 6\,\mathrm{m}\cdot 120\,\mathrm{kN} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{M_A = 350\,\mathrm{kNm}}$$

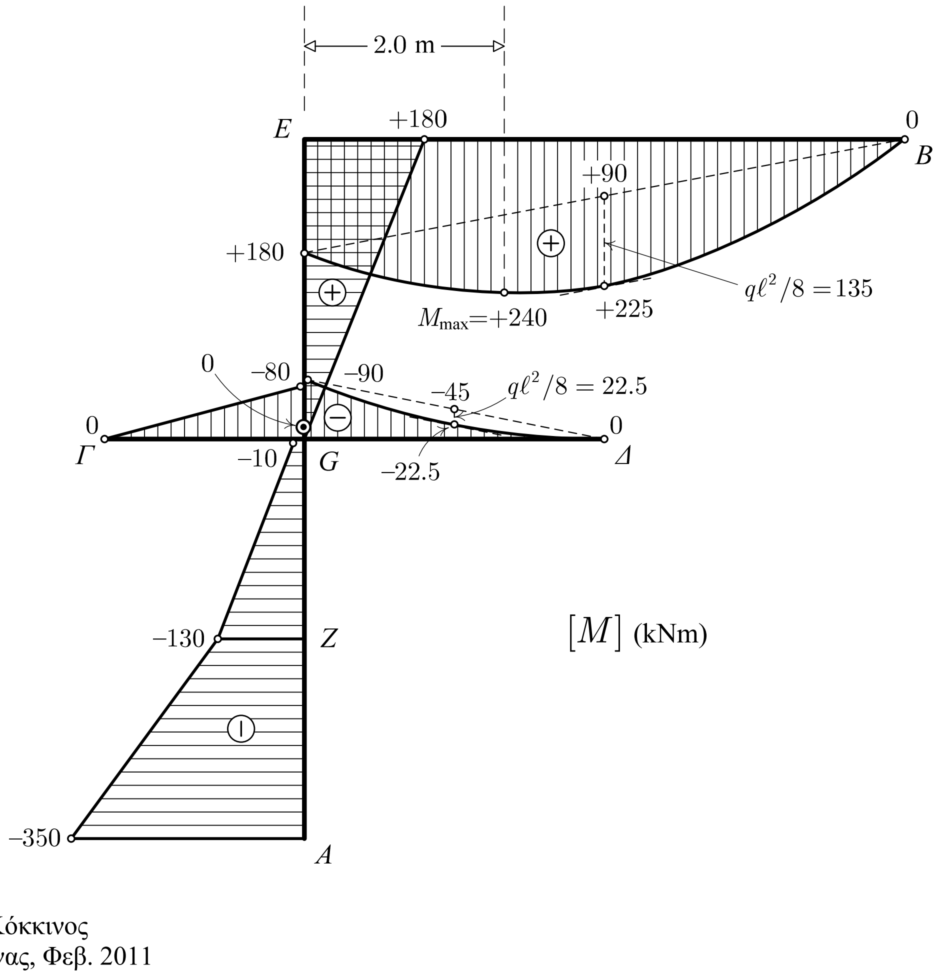
$$\Sigma F_x = 0 \;\Rightarrow\; A_x + 50\,\mathrm{kN} + 60\,\mathrm{kN} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{A_x = -110\,\mathrm{kN}}$$

$$\Sigma F_y = 0 \;\Rightarrow\; A_y + B - 40\,\mathrm{kN} - 20\,\mathrm{kN/m}\cdot 3\,\mathrm{m} - 30\,\mathrm{kN/m}\cdot 6\,\mathrm{m} = 0$$

$$\Rightarrow\; A_y + 120\,\mathrm{kN} - 40\,\mathrm{kN} - 60\,\mathrm{kN} - 180\,\mathrm{kN} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{A_y = 160\,\mathrm{kN}}$$




2.0 m
+60
+60
E
Q=0 → M_{max}
0
B
−120
+60
Γ
+60
0
G
Δ
−40
−40
+60
+110
Z
+110
A
[Q] (kN)


2.0 m
E
+180
0
B
+90
+180
$q\ell^2/8 = 135$
M_{max}=+240
+225
0
−80
−90
−45
$q\ell^2/8 = 22.5$
0
0
Γ
−10
G
−22.5
Δ
−130
Z
[M] (kNm)
−350
A

Υπολογισμός Αξονικών Δυνάμεων:

από το *A* προς το G : $N_A = -A_y = -160\,\mathrm{kN}$, $N_{G,\,\text{κάτω}} = -A_y = -160\,\mathrm{kN}$

από το *Γ* προς το G : $N_\Gamma = 0\,\mathrm{kN}$, $N_{G,\,\text{αριστερά}} = 0\,\mathrm{kN}$

από το *Δ* προς το G : $N_\Delta = 0\,\mathrm{kN}$, $N_{G,\,\text{δεξιά}} = 0\,\mathrm{kN}$

από το *B* προς το *E* : $N_B = 0\,\mathrm{kN}$, $N_{E,\,\text{δεξιά}} = 0\,\mathrm{kN}$

από το *E* προς το G : $N_{E,\,\text{κάτω}} = -30\,\mathrm{kN/m}\cdot 6\,\mathrm{m} + B = -180\,\mathrm{kN} + 120\,\mathrm{kN} = -60\,\mathrm{kN}$, $N_{G,\,\text{πάνω}} = -60\,\mathrm{kN}$

Υπολογισμός Τεμνουσών Δυνάμεων:

από το *A* προς το *Z* : $Q_A = -A_x = -(-110\,\mathrm{kN}) = 110\,\mathrm{kN}$, $Q_{Z^-} = Q_A = 110\,\mathrm{kN}$

από το *Z* προς το G : $Q_{Z,\,\text{πάνω}} = 110\,\mathrm{kN} - 50\,\mathrm{kN} = 60\,\mathrm{kN}$, $Q_{G,\,\text{κάτω}} = Q_{Z,\,\text{πάνω}} = 60\,\mathrm{kN}$

από το *Γ* προς το G : $Q_\Gamma = -40\,\mathrm{kN}$, $Q_{G,\,\text{αριστερά}} = Q_\Gamma = -40\,\mathrm{kN}$

από το *Δ* προς το G : $Q_\Delta = 0\,\mathrm{kN}$, $Q_{G,\,\text{δεξιά}} = +60\,\mathrm{kN}$ ώστε η τιμή της τέμνουσας να γίνεται μηδέν στο άκρο *Δ* μετά το κατανεμημένο φορτίο από το G έως το *Δ*, δηλαδή $Q_\Delta = Q_{G,\,\text{δεξιά}} - 20\,\mathrm{kN/m}\cdot 3\,\mathrm{m} = 0\,\mathrm{kN}$.

τομή πάνω από το G και εξέταση του τμήματος που βρίσκεται κάτω από την τομή (σχήματος ταυ) : $Q_{G,\,\text{πάνω}} = -A_x - 50\,\mathrm{kN} = -(-110\,\mathrm{kN}) - 50\,\mathrm{kN} = 60\,\mathrm{kN}$, $Q_{E,\,\text{κάτω}} = Q_{G,\,\text{πάνω}} = 60\,\mathrm{kN}$. Για την ίδια τομή, εάν εξετασθεί όλο το τμήμα που βρίσκεται πάνω από αυτή, θα είναι: $Q_{G,\,\text{πάνω}} = 60\,\mathrm{kN}$ (που οφείλεται στην οριζόντια δύναμη στο σημείο *E*).

τομή δεξιά του *E* και εξέταση του τμήματος που βρίσκεται δεξιά της τομής (δοκός *EB*) :

$$Q_{E,\,\text{δεξιά}} = (30\,\mathrm{kN/m}\cdot 6\,\mathrm{m}) - B = 180\,\mathrm{kN} - 120\,\mathrm{kN} = +60\,\mathrm{kN}\,.$$

Για την ίδια τομή, εάν εξετασθεί ο υπόλοιπος φορέας (εκτός από την δοκό *EB*), δηλαδή το τμήμα που βρίσκεται αριστερά και κάτω από την τομή, θα είναι:

$$Q_{E,\,\text{δεξιά}} = A_y - 40\,\mathrm{kN} - (20\,\mathrm{kN/m}\cdot 3\,\mathrm{m}) = 160\,\mathrm{kN} - 40\,\mathrm{kN} - 60\,\mathrm{kN} \;\Rightarrow$$

$$Q_{E,\,\text{δεξιά}} = +60\,\mathrm{kN}$$

Υπολογισμός Καμπτικών Ροπών:

τομή λίγο πάνω από το *A* και εξέταση του τμήματος κάτω από την τομή:

$M_{A,\,\text{πάνω}} = -M_A = -350\,\mathrm{kNm}$ (η αντίδραση M_A θλίβει τη θετική ίνα στο *A*)

τομή στο *Z* και εξέταση του τμήματος κάτω από την τομή:

$$M_Z = -M_A - 2\,\mathrm{m}\cdot A_x = -350\,\mathrm{kNm} - 2\,\mathrm{m}\cdot(-110\,\mathrm{kN}) = -130\,\mathrm{kNm}$$

τομή κάτω από το G και εξέταση του τμήματος κάτω από την τομή:

$$\begin{aligned} M_{G,\,\text{κάτω}} &= -M_A - 4\,\mathrm{m}\cdot A_x - 2\,\mathrm{m}\cdot 50\,\mathrm{kN} \\ &= -350\,\mathrm{kNm} - 4\,\mathrm{m}\cdot(-110\,\mathrm{kN}) - 100\,\mathrm{kNm} = -10\,\mathrm{kNm} \end{aligned}$$

τομή αριστερά από το G και εξέταση του τμήματος αριστερά της τομής:

$$M_{G,\,\text{αριστερά}} = -2\,\mathrm{m}\cdot 40\,\mathrm{kN} = -80\,\mathrm{kNm}$$

τομή δεξιά από το G και εξέταση του τμήματος δεξιά της τομής:

$$M_{G,\,\text{δεξιά}} = -(20\,\mathrm{kN/m}\cdot 3\,\mathrm{m})\cdot 1.5\,\mathrm{m} = -90\,\mathrm{kNm}$$

τομή πάνω από το G και εξέταση του τμήματος πάνω από την τομή:

$$M_{G,\,\text{πάνω}} = 0\,\mathrm{kNm} \quad \text{(λόγω άρθρωσης, βλέπε εξίσωση για αντίδραση στο } B\text{)}$$

τομή κάτω από το E και εξέταση του τμήματος πάνω από την τομή:

$$\begin{aligned} M_{E,\,\text{κάτω}} &= -(30\,\mathrm{kN/m}\cdot 6\,\mathrm{m})\cdot 3\,\mathrm{m} + 6\,\mathrm{m}\cdot B \\ &= -540\,\mathrm{kNm} + 720\,\mathrm{kNm} = 180\,\mathrm{kNm} \end{aligned}$$

τομή δεξιά του E και εξέταση του τμήματος δεξιά της τομής (όμοια με την προηγούμενη):

$$M_{E,\,\text{δεξιά}} = M_{E,\,\text{κάτω}} = 180\,\mathrm{kNm}$$

<u>Υπολογισμός Μέγιστης Καμπτικής Ροπής</u>

Η μέγιστη ροπή θα εμφανισθεί σε σημείο κάτω από το κατανεμημένο φορτίο όπου η τέμνουσα μηδενίζεται. Αυτό σύμφωνα με το διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων θα συμβεί δεξιά του σημείου E σε απόσταση x, η οποία υπολογίζεται από τη σχέση:

$$x = \frac{60\,\mathrm{kN}}{30\,\mathrm{kN/m}} = 2.0\,\mathrm{m}$$

Η δε τιμή της μέγιστης ροπής στο σημείο αυτό μπορεί να προκύψει με δύο τρόπους. Κατά τον πρώτο τρόπο γίνεται τομή στο σημείο αυτό και υπολογίζεται η ροπή από το δεξί τμήμα της τομής, που είναι προς το σημείο B και έχει μήκος $(6-2)\,\mathrm{m} = 4\,\mathrm{m}$:

$$M_{\text{max}} = -(30\,\mathrm{kN/m}\cdot 4\,\mathrm{m})\cdot\frac{4\,\mathrm{m}}{2} + 4\,\mathrm{m}\cdot B = -240\,\mathrm{kNm} + 4\,\mathrm{m}\cdot 120\,\mathrm{kN} \;\Rightarrow$$

$$\underline{M_{\text{max}} = 240\,\mathrm{kNm}|}$$

Ο δεύτερος τρόπος βασίζεται στο εμβαδό του διαγράμματος της τέμνουσας:

$$M_{\text{max}} = M_E + \text{εμβαδόν}\, Q_{\text{από } E \text{ έως θέση } M_{\text{max}}} = +180\,\mathrm{kNm} + \tfrac{1}{2} 2\,\mathrm{m}\cdot 60\,\mathrm{kN} \;\Rightarrow$$

$$\underline{M_{\text{max}} = 240\,\mathrm{kNm}|}$$

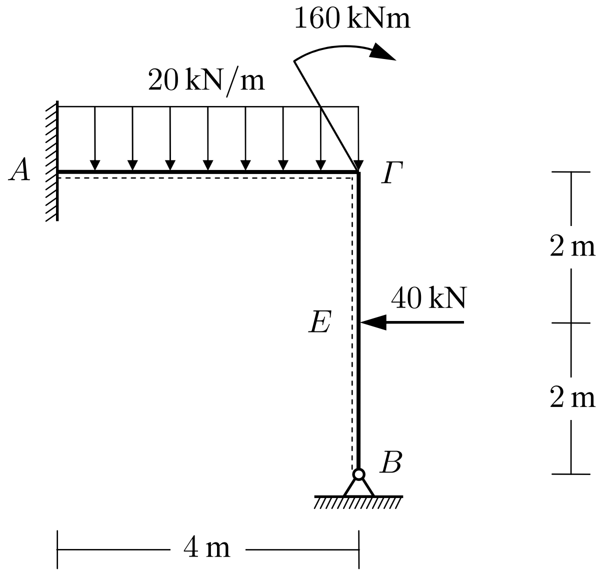
ΘΕΜΑ 2ο (35%)

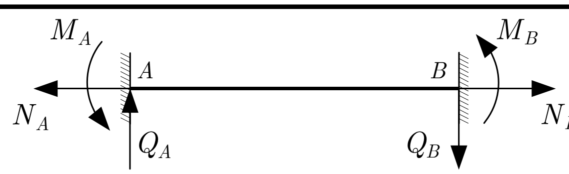
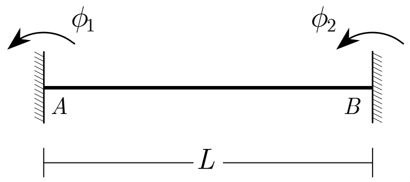
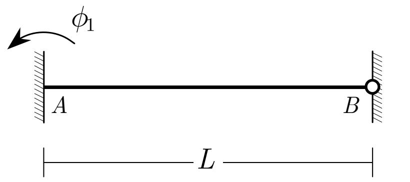
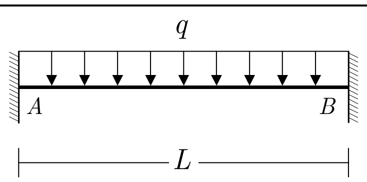
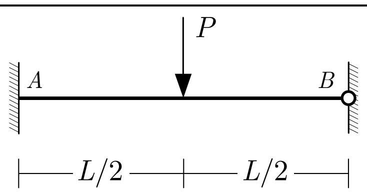
Να επιλυθεί ο υπερστατικός φορέας του σχήματος χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των παραμορφώσεων.

(α) Να υπολογισθούν οι καμπτικές ροπές στα σημεία A και Γ (αριστερά και κάτω).

(β) Να σχεδιασθεί το διάγραμμα ροπών του φορέα.

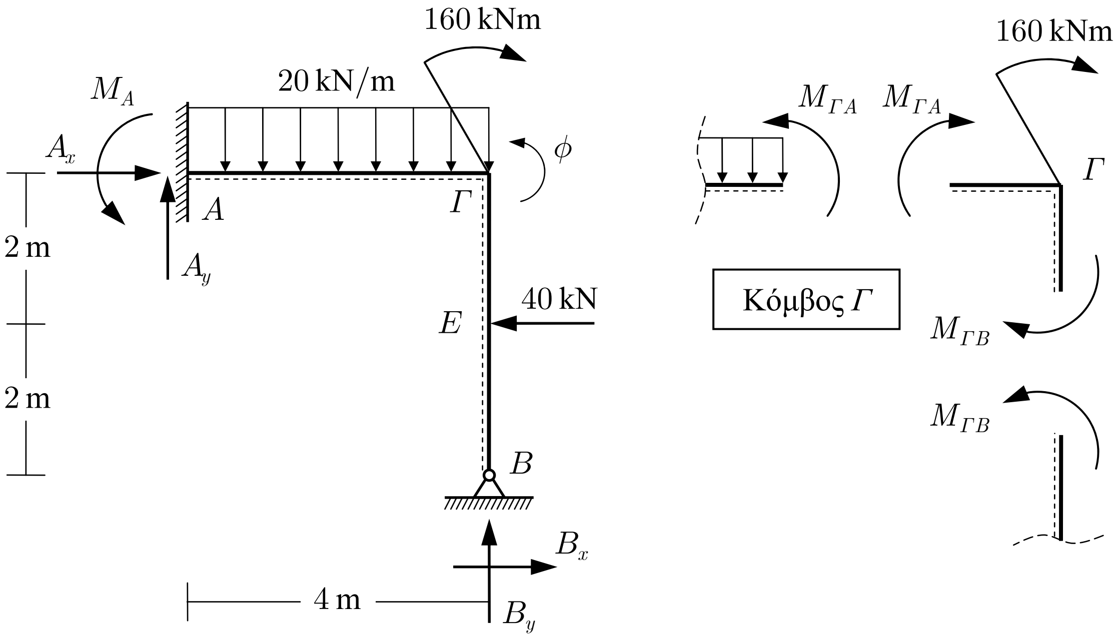
(γ) Να προσδιορισθούν οι μέγιστες θετικές ροπές κάμψης.



ΑΚΡΑΙΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ ΜΟΝΟΠΑΚΤΩΝ ΚΑΙ ΑΜΦΙΠΑΚΤΩΝ ΜΕΛΩΝ	
	$M_A = \frac{2EI}{L}(2\phi_1 + \phi_2)$, $M_B = \frac{2EI}{L}(\phi_1 + 2\phi_2)$ $Q_A = \frac{6EI}{L^2}(\phi_1 + \phi_2)$, $Q_B = \frac{6EI}{L^2}(\phi_1 + \phi_2)$
	$M_A = \frac{3EI}{L}\phi_1$ $Q_A = \frac{3EI}{L^2}\phi_1$, $Q_B = \frac{3EI}{L^2}\phi_1$
	$M_A = \frac{qL^2}{12}$, $M_B = -\frac{qL^2}{12}$ $Q_A = \frac{qL}{2}$, $Q_B = -\frac{qL}{2}$
	$M_A = \frac{3PL}{16}$ $Q_A = \frac{11P}{16}$, $Q_B = -\frac{5P}{16}$

Επίλυση:

Άγνωστο μέγεθος παραμόρφωσης είναι μια αριστερόστροφη στροφή ϕ στο *Γ*.



Δοκός *ΑΓ*:

$$M_{A\Gamma} = \frac{2EI}{4}\phi + \frac{20\cdot 4^2}{12} \quad \Rightarrow \quad M_{A\Gamma} = \frac{EI\phi}{2} + \frac{80}{3}$$

$$M_{\Gamma A} = \frac{4EI}{4}\phi - \frac{20\cdot 4^2}{12} \quad \Rightarrow \quad M_{\Gamma A} = EI\phi - \frac{80}{3}$$

$$Q_{A\Gamma} = \frac{6EI}{4^2}\phi + \frac{20\cdot 4}{2} \quad \Rightarrow \quad Q_{A\Gamma} = \frac{3EI\phi}{8} + 40$$

$$Q_{\Gamma A} = \frac{6EI}{4^2}\phi - \frac{20\cdot 4}{2} \quad \Rightarrow \quad Q_{\Gamma A} = \frac{3EI\phi}{8} - 40$$

Δοκός *ΓΒ*:

$$M_{\Gamma B} = \frac{3EI}{4}\phi + \frac{3\cdot 40\cdot 4}{16} \quad \Rightarrow \quad M_{\Gamma B} = \frac{3EI\phi}{4} + 30$$

$$Q_{\Gamma B} = \frac{3EI}{4^2}\phi + \frac{11\cdot 40}{16} \quad \Rightarrow \quad Q_{\Gamma B} = \frac{3EI\phi}{16} + \frac{55}{2}$$

$$Q_{B\Gamma} = \frac{3EI}{4^2}\phi - \frac{5\cdot 40}{16} \quad \Rightarrow \quad Q_{B\Gamma} = \frac{3EI\phi}{16} - \frac{25}{2}$$

Ισορροπία ροπών κόμβου *Γ*:

$$\Sigma M_{\Gamma} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{\Gamma A} + M_{\Gamma B} + 160 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(EI\phi - \frac{80}{3}\right) + \left(\frac{3EI\phi}{4} + 30\right) + 160 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{EI\phi = -\frac{280}{3}}$$

Κόμβος *Α*:

$$A_y = Q_{A\Gamma} = \frac{3EI\phi}{8} + 40 \quad \Rightarrow \quad A_y = \frac{3}{8}\left(-\frac{280}{3}\right) + 40 \Rightarrow \quad \boxed{A_y = 5\,\mathrm{kN}}$$

$$M_A = M_{A\Gamma} = \frac{EI\phi}{2} + \frac{80}{3} \quad \Rightarrow \quad M_A = \frac{1}{2}\left(-\frac{280}{3}\right) + \frac{80}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_A = -20\,\mathrm{kNm}}$$

(ή $20\,\mathrm{kNm}$ δεξιόστροφα)

Κόμβος *Β*:

$$B_x = -Q_{B\Gamma} = -\left(\frac{3EI\phi}{16} - \frac{25}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad B_x = -\frac{3}{16}\left(-\frac{280}{3}\right) + \frac{25}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_x = 30\,\mathrm{kN}}$$

Κόμβος *Γ*:

$$M_{\Gamma A} = EI\phi - \frac{80}{3} = \left(-\frac{280}{3}\right) - \frac{80}{3} = -\frac{360}{3} \Rightarrow \quad \boxed{M_{\Gamma A} = -120\,\mathrm{kNm}}$$

$$Q_{\Gamma A} = \frac{3EI\phi}{8} - 40 = \frac{3}{8}\left(-\frac{280}{3}\right) - 40 = -35 - 40 \Rightarrow \quad \boxed{Q_{\Gamma A} = -75\,\mathrm{kN}}$$

$$M_{\Gamma B} = \frac{3EI\phi}{4} + 30 = \frac{3}{4}\left(-\frac{280}{3}\right) + 30 = -70 + 30 \Rightarrow \quad \boxed{M_{\Gamma B} = -40\,\mathrm{kNm}}$$

$$Q_{\Gamma B} = \frac{3EI\phi}{16} + \frac{55}{2} = \frac{3}{16}\left(-\frac{280}{3}\right) + \frac{55}{2} = -\frac{35}{2} + \frac{55}{2} \Rightarrow \quad \boxed{Q_{\Gamma B} = 10\,\mathrm{kN}}$$

Ισορροπία πλαισίου:

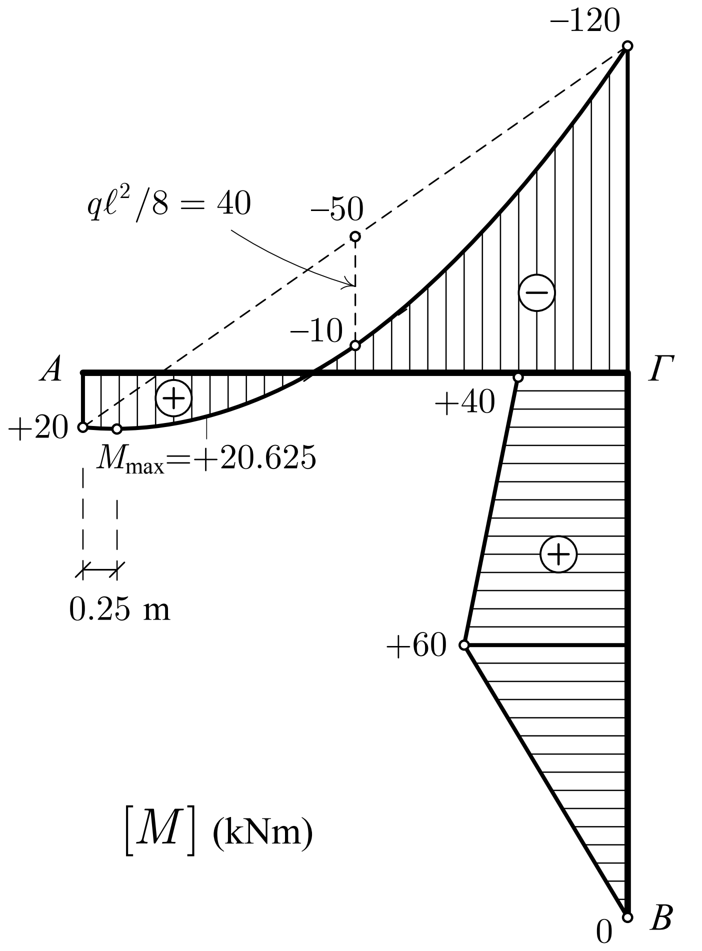
$$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x + B_x - 40 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x + 30 - 40 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_x = 10\,\mathrm{kN}}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y + B_y - 4 \cdot 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_y = 75\,\mathrm{kN}}$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A - \left(4 \cdot 20\right) \cdot 2 - 160 - 40 \cdot 2 + B_y \cdot 4 + B_x \cdot 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad -20 - 160 - 160 - 80 + 300 + 120 = 0 \quad \Rightarrow \quad -420 + 420 = 0 \quad \checkmark$$

Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών:



Υπολογισμός Μέγιστης Καμπτικής Ροπής

Η μέγιστη ροπή θα εμφανισθεί δεξιά της πάκτωσης A σε σημείο κάτω από το κατανεμημένο φορτίο όπου η τέμνουσα μηδενίζεται. Η απόστασή του x από το A δίνεται από τη σχέση:

$$x = \frac{5\,\mathrm{kN}}{20\,\mathrm{kN/m}} = 0.25\,\mathrm{m}$$

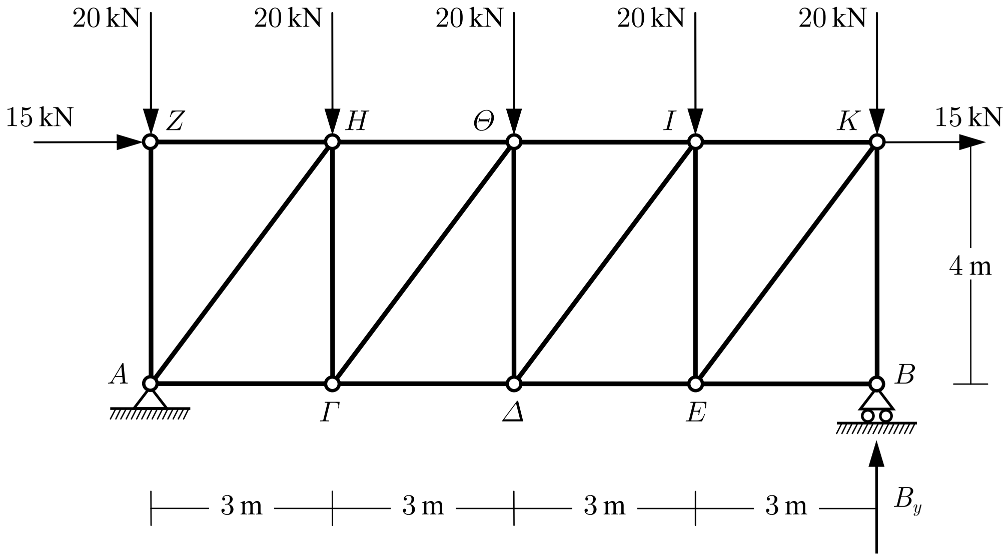
Η μέγιστη ροπή υπολογίζεται με βάση το εμβαδό του διαγράμματος της τέμνουσας:

$$M_{\max} = M_A + \text{εμβαδόν}\, Q\Big(\text{από } A \text{ έως θέση } M_{\max}\Big) \;\Rightarrow$$

$$M_{\max} = +20\,\mathrm{kNm} + \tfrac{1}{2} 0.25\,\mathrm{m}\cdot 5\,\mathrm{kN} \;\Rightarrow\; \underline{M_{\max} = 20.625\,\mathrm{kNm}}|$$

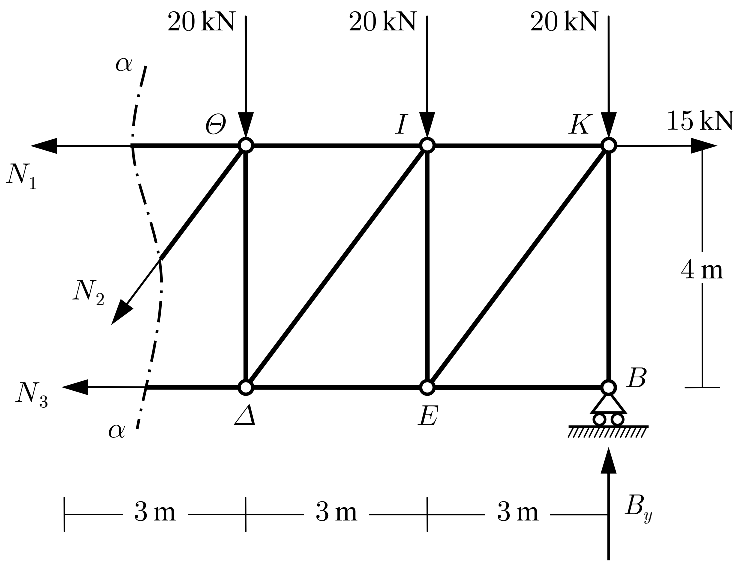
<u>ΘΕΜΑ 3ο</u> (20%)

Στο δικτύωμα του σχήματος να προσδιορισθούν οι δυνάμεις στα μέλη *ΗΘ*, *ΓΘ* και *ΓΔ* χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των τομών. Η κάθε δύναμη θα προσδιοριστεί ανεξάρτητα από τις άλλες δύο. Για όλα τα μέλη να διευκρινισθεί εάν υπόκεινται σε θλίψη ή εφελκυσμό.



<u>Επίλυση:</u>

Οι άγνωστες αξονικές δυνάμεις θα προσδιορισθούν κάνοντας τομή α-α η οποία τέμνει τα ζητούμενα τρία μέλη.



<u>Αντίδραση στη κύλιση Β:</u>

$$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0 \;\Rightarrow\; -4\cdot 15 - 3\cdot 20 - 6\cdot 20 - 9\cdot 20 - 12\cdot 20 - 4\cdot 15 + 12\cdot B_y = 0$$

$$\Rightarrow\; -60 - 60 - 120 - 180 - 240 - 60 + 12\cdot B_y = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{B_y = 60\,\text{kN}}$$

<u>Μέθοδος των τομών: Τομή *α-α* (δεξί τμήμα)</u>

Δύναμη N_1 στο μέλος *ΗΘ*:

$$\circlearrowleft \Sigma M_\Gamma = 0 \;\Rightarrow\; 4 \cdot N_1 - 3 \cdot 20 - 6 \cdot 20 - 9 \cdot 20 - 4 \cdot 15 + 9 \cdot B_y = 0$$

$$\Rightarrow\; 4 \cdot N_1 - 60 - 120 - 180 - 60 + 9 \cdot 60 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{N_1 = -30\,\mathrm{kN}}$$

(θλίψη)

Δύναμη N_3 στο μέλος *ΓΔ*:

$$\circlearrowleft \Sigma M_\Theta = 0 \;\Rightarrow\; -4 \cdot N_3 - 3 \cdot 20 - 6 \cdot 20 + 6 \cdot B_y = 0$$

$$\Rightarrow\; -4 \cdot N_3 - 60 - 120 + 6 \cdot 60 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{N_3 = 45\,\mathrm{kN}}$$

(εφελκυσμός)

Δύναμη N_2 στο μέλος ΓΘ:

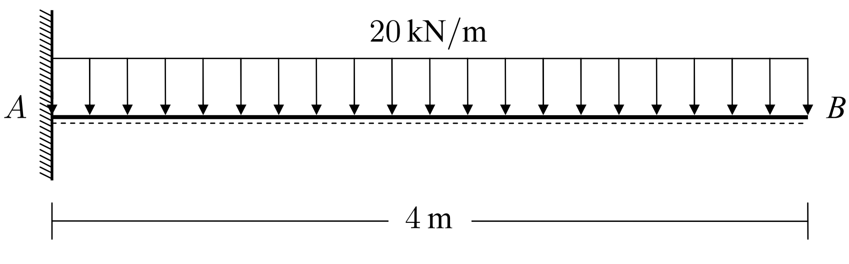
$$\Sigma F_y = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{4}{5} \cdot N_2 - 20 - 20 - 20 + B_y = 0$$

$$\Rightarrow\; -\frac{4}{5} \cdot N_2 - 60 + 60 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{N_2 = 0\,\mathrm{kN}}$$

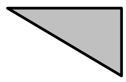
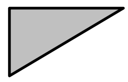
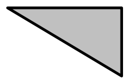
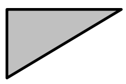
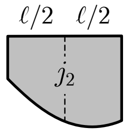
<u>**ΘΕΜΑ 4ο**</u> (20%)

Για τον πρόβολο του παρακάτω σχήματος ζητούνται η βύθιση w και η στροφή ϕ του άκρου *Β*. Δίνεται $EI = 10000\,\mathrm{kNm}^2$ και οι σχέσεις υπολογισμού των παραμορφώσεων:

$$w \cdot 1\,\mathrm{kN} = \int_0^\ell \frac{M\bar{M}}{EI} dx \qquad \text{και} \qquad \phi \cdot 1\,\mathrm{kNm} = \int_0^\ell \frac{M\bar{M}}{EI} dx$$

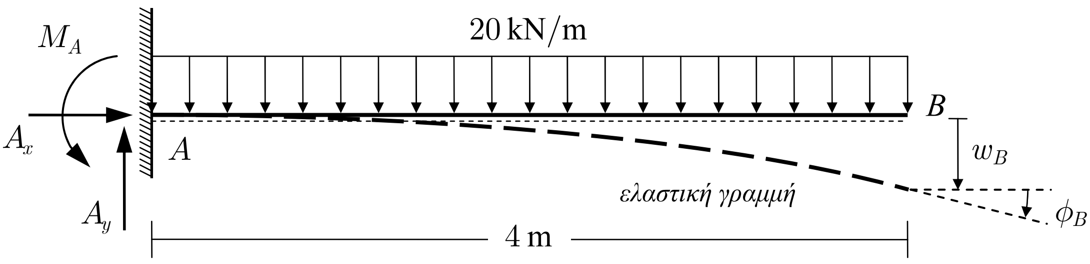


Οι πίνακες με τους πολλαπλασιασμούς διαγραμμάτων δίνονται στην επόμενη σελίδα.

Τιμές ολοκληρωμάτων $\int_0^\ell M_j M_k\, dx$			
$\int_0^\ell M_j M_k\, dx$	 ℓ, k	 ℓ, k	 ℓ, k
 ℓ, j	$\ell\, jk$	$\ell\,\frac{1}{2}\,jk$	$\ell\,\frac{1}{2}\,jk$
 ℓ, j	$\ell\,\frac{1}{2}\,jk$	$\ell\,\frac{1}{3}\,jk$	$\ell\,\frac{1}{6}\,jk$
 ℓ, j	$\ell\,\frac{1}{2}\,jk$	$\ell\,\frac{1}{6}\,jk$	$\ell\,\frac{1}{3}\,jk$
 $\ell/2$, $\ell/2$, j_1, j_2, j_3 τετραγ. παραβολή	$\ell\,\frac{1}{6}\,k\,(\,j_1+4j_2+j_3\,)$	$\ell\,\frac{1}{6}\,k\,(2j_2+j_3\,)$	$\ell\,\frac{1}{6}\,k\,(\,j_1+2j_2\,)$

<u>Επίλυση:</u>

Υπό την δεδομένη φόρτιση ο πρόβολος κάμπτεται και το άκρο του B βυθίζεται κατά w_B και στρίβει κατά γωνία ϕ_B. Οι παραμορφώσεις θα προσδιορισθούν με τη *μέθοδο του μοναδιαίου φορτίου* (*Αρχή Δυνατών Έργων*).



Σύμφωνα με τη μέθοδο του μοναδιαίου φορτίου προκειμένου να προσδιορισθεί η εγκάρσια μετατόπιση στο B (βύθιση) θα επιβληθεί στο φορέα μοναδιαία δύναμη στο ίδιο σημείο στη διεύθυνση της ζητούμενης μετατόπισης, δηλαδή εγκάρσια (Φόρτιση 1). Για δε το προσδιορισμό της στροφής στο B θα πρέπει στο άκρο B του προβόλου να επιβληθεί μοναδιαία ροπή (Φόρτιση 2).

Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών προβόλου για τη δεδομένη εξωτερική φόρτιση

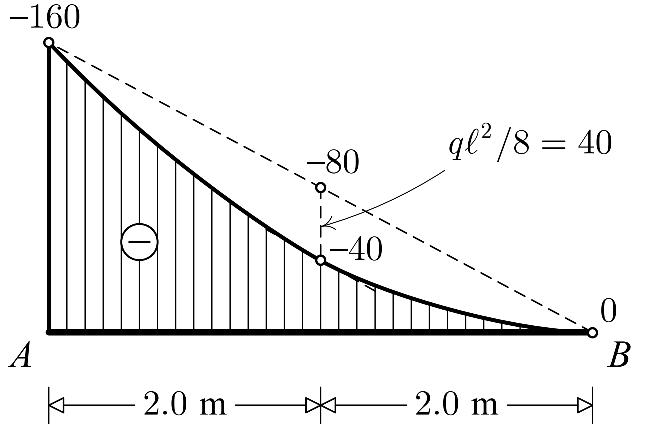
Αντιδράσεις του φορέα:

$$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0 \;\Rightarrow\; M_A - (20\,\mathrm{kN/m}\cdot 4\,\mathrm{m})\cdot 2\,\mathrm{m} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{M_A = 160\,\mathrm{kN}}|$$

$$\Sigma F_x = 0 \;\Rightarrow\; \underline{A_x = 0\,\mathrm{kN}}|$$

$$\Sigma F_y = 0 \;\Rightarrow\; A_y - 20\,\mathrm{kN/m}\cdot 4\,\mathrm{m} = 0 \;\Rightarrow\; A_y - 80\,\mathrm{kN} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{A_y = 80\,\mathrm{kN}}|$$

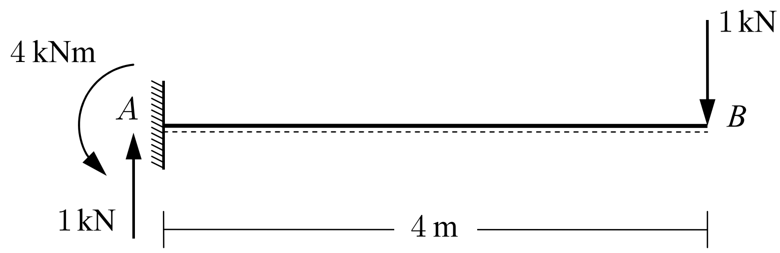
Διάγραμμα ροπών του φορέα για τη δεδομένη εξωτερική φόρτιση που είναι το κατανεμημένο φορτίο $q = 20\,\mathrm{kN/m}$ και η οποία προκαλεί τις ζητούμενες παραμορφώσεις στο άκρο *B*.



$[M]$ (kNm)

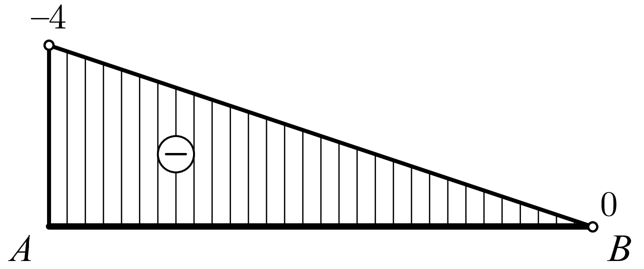
Υπολογισμός βύθισης στο άκρο *B* του προβόλου

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, για να υπολογισθεί η βύθιση στο άκρο *B* του προβόλου, θα ασκηθεί στο *B* δύναμη, στην κατακόρυφη διεύθυνση και μέτρου $1\,\mathrm{kN}$.



Το διάγραμμα ροπών $\overline{M}_1$ του προβόλου για τη μοναδιαία δύναμη δίνεται στο επόμενο σχήμα και αξιοποιείται στη σχέση υπολογισμού της ζητούμενης βύθισης, η οποία παίρνει τη μορφή:

$$w_B \cdot 1\,\mathrm{kN} = \int_0^{\ell} \frac{M\bar{M}_1}{EI}\,dx = \frac{1}{EI}\int_0^{4} M\bar{M}_1\,dx = \frac{1}{EI}\left(\text{παραβολή} \times \text{τρίγωνο}\right)$$



$\left[\bar{M}_1\right]$ (kNm)

Συνεπώς, σύμφωνα με τους πίνακες υπολογισμού του ολοκληρώματος και συγκεκριμένα την έκφραση στο κελί (4,3), η βύθιση θα υπολογισθεί ως εξής:

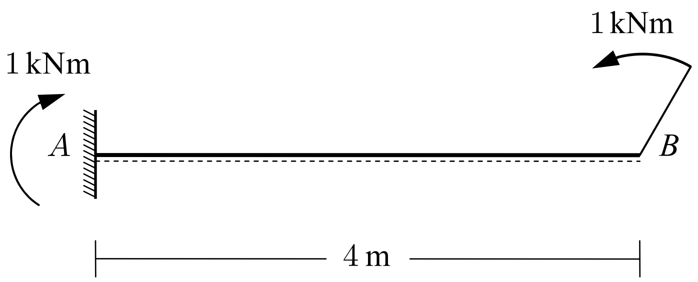
$$\begin{aligned} w_B \cdot 1\,\mathrm{kN} &= \frac{1}{EI}\left(\text{παραβολή} \times \text{τρίγωνο}\right) = \frac{1}{EI}\left[\,\ell\,\tfrac{1}{6}k\left(j_1 + 2j_2\right)\right] \\ &= \frac{1}{EI}\left[\,4\,\mathrm{m} \cdot \tfrac{1}{6}\left(-4\,\mathrm{kNm}\right)\left\{\left(-160\,\mathrm{kNm}\right) + 2\left(-40\,\mathrm{kNm}\right)\right\}\right] \\ &= \frac{1}{EI}\left[\,4\,\mathrm{m} \cdot \tfrac{1}{6}\left(-4\,\mathrm{kNm}\right)\left(-240\,\mathrm{kNm}\right)\right] = \frac{640\,\mathrm{kNm} \cdot \mathrm{kNm} \cdot \mathrm{m}}{10000\,\mathrm{kNm}^2} = \frac{640\,\mathrm{kNm}}{10000} \end{aligned}$$

επομένως, η βύθιση θα είναι:

$$w_B \cdot 1\,\mathrm{kN} = \frac{640\,\mathrm{kNm}}{10000} \;\Rightarrow\; w_B = \frac{640}{10000}\,\mathrm{m} \;\Rightarrow\; \underline{w_B = 6.4\,\mathrm{cm}}$$

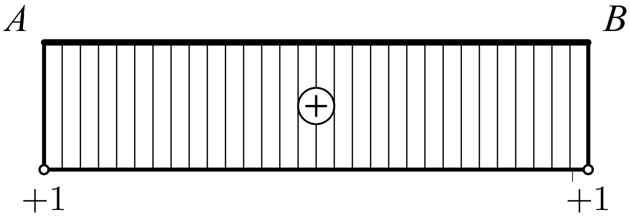
<u>Υπολογισμός στροφής στο άκρο *B* του προβόλου</u>

Για να υπολογισθεί η στροφή στο άκρο *B* του προβόλου, θα ασκηθεί στο *B* ροπή μέτρου $1\,\mathrm{kNm}$.



Το διάγραμμα ροπών $\bar{M}_2$ του προβόλου για τη μοναδιαία ροπή δίνεται στο επόμενο σχήμα και αξιοποιείται στη σχέση υπολογισμού της ζητούμενης στροφής, η οποία παίρνει τη μορφή:

$$\phi_B \cdot 1\,\mathrm{kNm} = \int_0^{\ell} \frac{M\bar{M}_2}{EI}\,dx = \frac{1}{EI}\int_0^{4} M\bar{M}_2\,dx = \frac{1}{EI}\Big(\text{παραβολή} \times \text{παραλληλόγραμμο}\Big)$$



$\left[\bar{M}_2\right]$ (kNm)

Από τους πίνακες υπολογισμού του ολοκληρώματος χρησιμοποιείται η έκφραση στο κελί (4,1), η βύθιση θα υπολογισθεί ως εξής:

$$\begin{aligned}\phi_B \cdot 1\,\mathrm{kNm} &= \frac{1}{EI}\Big(\text{παραβολή} \times \text{παραλληλόγραμμο}\Big) = \frac{1}{EI}\Big[\,\ell\,\tfrac{1}{6}\,k\Big(\,j_1 + 4j_2 + j_3\,\Big)\Big] \\ &= \frac{1}{EI}\Big[4\,\mathrm{m}\cdot\tfrac{1}{6}\Big(+1\,\mathrm{kNm}\Big)\Big\{\Big(-160\,\mathrm{kNm}\Big) + 4\Big(-40\,\mathrm{kNm}\Big) + \Big(0\,\mathrm{kNm}\Big)\Big\}\Big] \\ &= \frac{1}{EI}\Big[4\,\mathrm{m}\cdot\tfrac{1}{6}\Big(+1\,\mathrm{kNm}\Big)\Big(-320\,\mathrm{kNm}\Big)\Big] = \frac{-640\,\mathrm{kNm}\cdot\mathrm{kNm}\cdot\mathrm{m}}{3\cdot 10000\,\mathrm{kNm}^2} = \frac{-640\,\mathrm{kNm}}{30000}\end{aligned}$$

και τελικά η στροφή θα είναι:

$$\phi_B \cdot 1\,\mathrm{kNm} = \frac{-640\,\mathrm{kNm}}{30000} \;\Rightarrow\; \phi_B = \frac{-640}{30000}\,\mathrm{rad} \;\Rightarrow\; \underline{\phi_B = 0.02133\,\mathrm{rad}}\Big|$$